27/11/2015

Έστω $x: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ σύστημα συντ/νων με παραμέτρους (u,v)

$p \in X(U)$ $p \in X(q)$. $\{X_u(q), X_v(q)\}$ βάση του T_pS

Το $N(p) = \dfrac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \times X_v\|}(q) = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(X^{-1}(p))$ είναι μοναδιαίο κάθετο στο

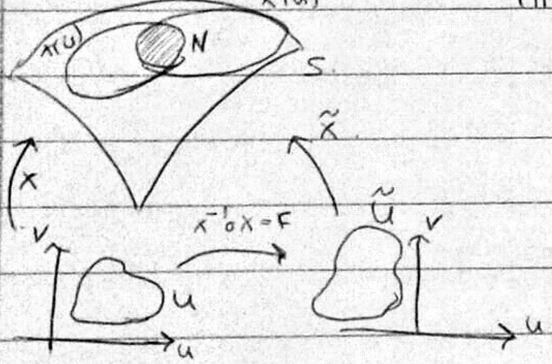
T_pS.

Άρα $\forall p \in X(U)$ έχω (το ένα από τα δύο) μοναδιαία κάθετα στο T_pS.

Μπορώ να ορίσω την απεικόνιση $N: X(U) \to \mathbb{R}^3$ με

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X.$$

Συμπέρασμα: Για κάθε περιοχή συντεταγμένων $X(U)$ υπάρχει διαφορ. απεικόνιση $N: X(U) \to \mathbb{R}$ με $\left.\begin{array}{l}(i)\ \|N(p)\| = 1 \\ (ii)\ N(p) \perp T_pS\end{array}\right\} \forall p \in X(U)$.



$$\tilde{N} = \frac{\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v}{\|\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v\|} \circ \tilde{X}^{-1}$$

$$\tilde{X}^{-1} \circ X = F \Rightarrow \boxed{X = \tilde{X} \circ F}$$

$$X(u,v) = \tilde{X}(\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v)).$$

$$\begin{cases} X_u = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \tilde{X}_{\tilde{u}} + \dfrac{\partial v}{\partial u} \tilde{X}_{\tilde{v}} \\[2ex] X_v = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{u}} + \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \tilde{X}_{\tilde{v}} \end{cases}$$

$$X_u \times X_v = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} X_{\tilde{u}} \times X_{\tilde{v}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} X_{\tilde{v}} \times X_{\tilde{u}} = \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial v} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}\right) \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}$$

$$\boxed{X_u \times X_v = \frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)} \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}}$$

$$\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1} = \frac{\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)} \tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}}{\left\|\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}\right\| \|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\|} \circ X^{-1} = F \frac{\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v}{\|\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v\|} \circ X^{-1}$$

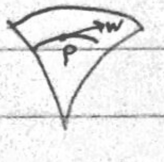
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΙΜΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ:

Ορισμος: Μια κανονική επιφανεια καλειται προσανατολισιμη αν-ν υπαρχει διαφορισιμη απεικόνιση $N: S \to \mathbb{R}^3$ ωστε:
(i) $\|N(p)\| = 1 \ \forall p \in S$
(ii) $N(p) \perp T_p(S) \ \forall p \in S$
(Το N καλειται μοναδιαιο καθετο διαφορισιμο διανυσματικο πεδιο ή προσανατολισμος της S).
Η S καλειται προσανατολισμενη αν-ν είναι προσανατολισιμη και εχει επιπλεον ενα προσανατολισμο.

παραδειγματα:
① ~~Γραφηματα~~: $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x,y)) / (x,y) \in U\}.$$
$X: U \to \Gamma_f, \ X(u,v) = (u, v, f(u,v))$.
Το γραφημα Γ_f είναι προσανατολισιμη με $N(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1}(p), \ p \in \Gamma_f$.

Θεωρημα: Εστω $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ λεια και $a \in f(U)$. Αν το $f^{-1}(a)$ δεν περιεχει κανενα κρισιμο σημειο της f, τοτε το $f^{-1}(a)$ είναι προσανατολισιμη επιφανεια με προσανατολισμο:
$$N: f^{-1}(a) \to \mathbb{R}^3, \ N(p) = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}(p)$$

Αποδειξη:
Αρκεί νδο $\operatorname{grad} f(p) \perp T_p S \ \forall p \in S = f^{-1}(a)$.
Εστω $p \in S$, $w \in T_p S$. Οδο $\operatorname{grad} f(p) \perp w$
Υπαρχει καμπύλη $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$, $c(0) = 1$, $c'(0) = w$.



$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$
$f(c(t)) = f(x(t), y(t), z(t)) = a \ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
$\Rightarrow x'(t) f_x(c(t)) + y'(t) f_y(c(t)) + z'(t) f_z(c(t)) = 0$
Για $t = 0 \Rightarrow x'(0) f_x(p) + y'(0) f_y(p) + z'(0) f_z(0) = 0 \Leftrightarrow$

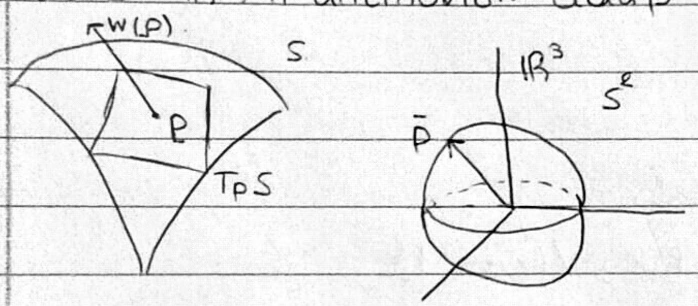
$\Leftrightarrow \langle (x'(0), y'(0), z'(0)), (f_x(p), f_y(p), f_z(p)) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle w, \operatorname{grad} f(0) \rangle = 0$

Απεικόνιση Gauss (ή σφαιρική απεικόνιση)

$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 = 1\}$

Ορισμός: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με προσανατολισμό $N: S \to \mathbb{R}^3$. Η απεικόνιση Gauß της S είναι η απεικόνιση $N: S \to S^2$.



Το σημείο $\bar{P} \in S^2$, ως εξής:

$\vec{OP} = N(p)$.

Παραδείγματα:

① Επίπεδο: Έστω $\Pi: Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ επίπεδο $(A, B, \Gamma) \neq (0,0,0)$.

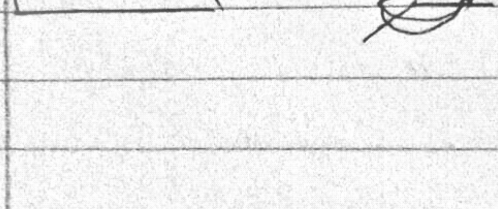
$\Pi = f^{-1}(0)$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = Ax + By + \Gamma z + \Delta$

$f = A$, $f_y = B$ $f_z = \Gamma$ Δεν έχει κρίσιμα σημεία

Άρα $f^{-1}(0)$ είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια με προσανατολισμό

$N: \Pi \to \mathbb{R}^3$, $N = \dfrac{(A, B, \Gamma)}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$.

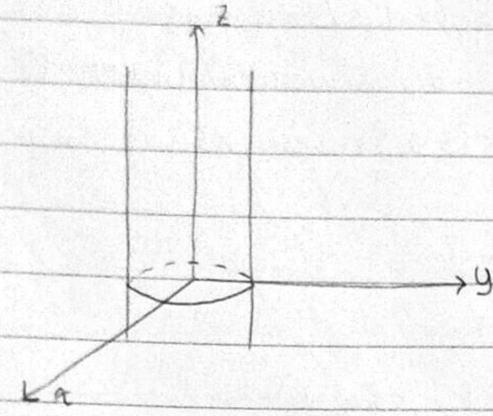
Η απεικόνιση Gauß $N: \Pi \to S^2$



$N(t) = \dfrac{(A, B, \Gamma)}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$ είναι το $N(\Pi) = \left\{ \dfrac{(A, B, \Gamma)}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} \right\}$

② Κυλινδρος: $S: x^2+y^2=r^2$ $\quad f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=x^2+y^2-r$

$S=f^{-1}(0)$, $\text{grad}(x,y,z)=(2x,2y,0)$



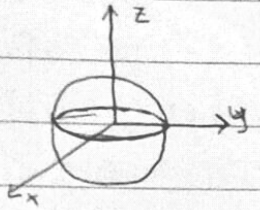
Το S είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια με

$$N(x,y,z)=\frac{\text{grad} f(x,y,z)}{\|\text{grad} f(x,y,z)\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(x,y,z)=\frac{(2x,2y,0)}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{(2x,2y,0)}{2\sqrt{r^2}}=$$

$$=\frac{1}{r}(x,y,0).$$

Η απεικονιση Gauß είναι: $N: S\to S^2$ $\ N(x,y,z)=\frac{1}{r}(x,y,0)$.



Η εικονα είναι ο κυκλος πανω στον Oxy γιατι το z είναι 0 και παιρναμε τομη του S^2 με το επιπεδο Oxy.

$T_pS=\{(w_1,w_2,w_3)/w_1x+w_2y+w_3z=0\}$

③ Σφαιρα: $S^2_R=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2=R^2\}$ οπου $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$, $S^2_R=f^{-1}(0)$

$f_x(x,y,z)=2x \quad f_y(x,y,z)=2y \quad f_z(x,y,z)=2z$.

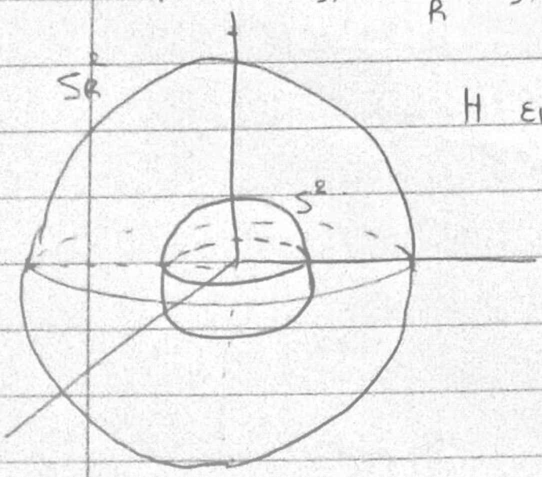
Η $S^2_R=f^{-1}(0)$ είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια με προσανατολισμό

$N: S^2_R\to\mathbb{R}^3$ με $N(x,y,z)=\frac{\text{grad} f(x,y,z)}{\|\text{grad} f(x,y,z)\|}=\frac{(2x,2y,2z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow N(x,y,z)=\frac{1}{R}(x,y,z)$.

Η απεικονιση Gauß της S^2_R είναι η $N: S^2_R\to S^2$

με $N(x,y,z)=\frac{1}{R}(x,y,z)$, $(x,y,z)\in S^2$.



Η εικονα είναι $N(S^2_R)=S^2$

Αν μου δωσουν ενα σημειο μπορω να βρω το εφαπτομενο επιπεδο:

$T_pS^2_R=\{w\in T_p\mathbb{R}^3 / \langle w,(x,y,z)\rangle=0\}$

$=\{w=(w_1,w_2,w_3)/w_1x+w_2y+w_3z=0\}$

④ Γραφήματα: $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ λεία.

Θεωρώ το γράφημα $\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) / (x,y) \in U\}$.

Η Γ_f είναι προσανατολίσιμη με προσανατολισμό $N : \Gamma_f \to \mathbb{R}$.

$N = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \circ X^{-1}$ όπου $X : U \to \Gamma_f$ και $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$.

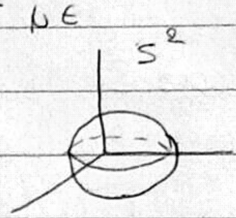
$$X_u = (1, 0, f_u)$$
$$X_v = (0, 1, f_v)$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = (-f_u, -f_v, 1)$$

Άρα $N(p) = \dfrac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f^2_x + f^2_y + 1}}(x,y)$, $p = (x, y, f(x,y))$.

Η απεικόνιση Gauß είναι $N : S \to S^2$ με

$N(p) = \left(\dfrac{-f_x}{\sqrt{\ }}, \dfrac{-f_y}{\sqrt{\ }}, \dfrac{1}{\sqrt{\ }} \right)$



Η 3η συντεταγμένη είναι πάντα θετική

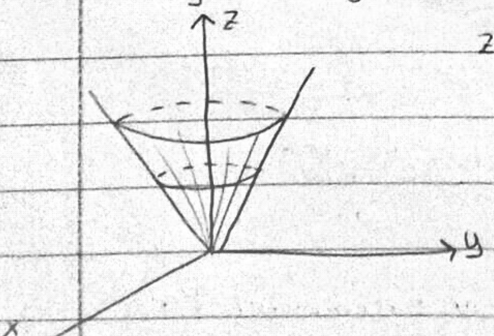
άρα περιέχεται ΠΑΝΤΑ στο πάνω ημισφαίριο.

Άρα η εικόνα της θα είναι: $N(\Gamma_f) \subset S^2_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\}$.

Άσκηση/Εφαρμογή στα Γραφήματα:

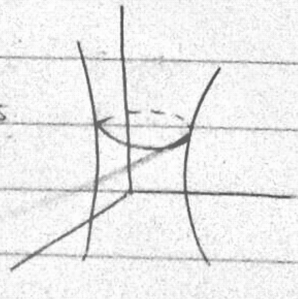
$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$



σπίτι.

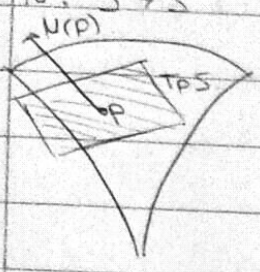
Μονόχωνο υπερβολοειδές

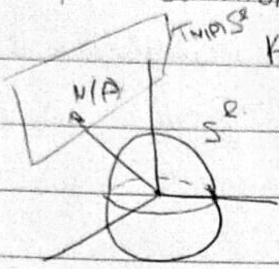


σπίτι.

Απεικονιση Weigarten η τελεστης σχηματος:

Ορισμος: Εστω S προσανατολισμενη επιφανεια με απεικονιση Gauβ $N: S \to S^2$





Καλουμε απεικονιση Weigarten (ή τελεστή σχηματος) της S στο p τη γραμμική $L_p = -dN_p$, $L_p: T_pS \to T_{N(p)} S^2$

Παρατηρηση: Τα επιπεδα T_pS και $T_{N(p)} S^2$ ειναι καθετα στο διανυσμα $N(p)$ αρα μπορω να τα ταυτισω μεσω παραλληλης μεταφορας στον $\mathbb{R}^3$ και ετσι η απεικονιση Weigarten είναι ενδομορφισμος του T_pS, δηλ. $L_p: T_pS \to T_pS$.

παραδειγματα:

① Επιπεδα: $\Pi: Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$. Η απεικονιση Gauβ ειναι $N: \Pi \to S^2$ με $N = \frac{(A, B, \Gamma)}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$, $p \in \Pi$ $L_p: T_p\Pi \to T_p\Pi$.

$w \in T_p\Pi$, $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Pi$, $c(0) = p$, $c'(0) = w$.

$L_p w = -dN_p(w) = -(N \circ c)'(0) = ;$ $\quad N \circ c(t) = N(c(t)) = \frac{(A, B, \Gamma)}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} = c$

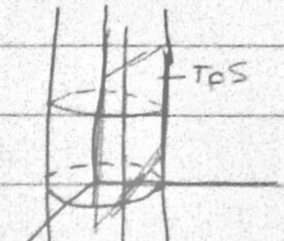
$= 0$

$\Rightarrow (N \circ c)'(0) = 0$

$\Rightarrow \boxed{L_p = 0}$

② Κυλινδρες: $S: x^2 + y^2 = r^2$.

Εχει απεικονιση Gauβ $N: S \to S^2$ μ $N(p) = N(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, z)$.



$L_p: T_pS \to T_pS$.

$p = (x_0, y_0, w_0)$, $w \in T_pS$

$T_pS = \{ w = (w_1, w_2, w_3) / w_1 x_0 + w_2 y_0 = 0 \}$, $L_p w = -dN_p(w) = -(N \circ c)'(0)$

$c(0) = p$, $c'(0) = w$.

$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

$N\circ c(t) = N(x(t), y(t), z(t)) = \frac{1}{r}(x, y, 0)$.

$(N\circ c(t))'(0) = \frac{1}{r}(x'(0), y'(0), 0) = \frac{1}{r}(w_1, w_2, 0)$.

Απαντηση:

Η απεικονιση Weigarten του κυλινδρου σε τυχον σημειο ειναι:

$L_p : T_pS \to T_pS, \quad T_pS = \{(w_1, w_2, w_3) = w \,/\, w_1x_0 + w_2y_0 = 0\}$.

$p = (x_0, y_0, z_0)$.

$L_p(w) = \frac{1}{r}(w_1, w_2, 0)$.

$L_p(0,0,w_3) = 0 = 0\cdot(0,0,w_3)$ γεννητριες παραλληλες στον Oz.

ιδιοδιανυσματα με ιδιοτιμη 0.

Η ιδιοτιμη δηλωνει την καμπυλοτητα

των ευθειων = 0.

$L_p(w_1, w_2, 0) = -\frac{1}{r}(w_1, w_2, 0)$

καμπυλοτητα του κυκλου.

③ Σφαιρα: $S_R^2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 = R^2\}$.

με απεικονιση Gauß $N : S_R^2 \to S^2$, $N(x,y,z) = \frac{1}{r}(x,y,z)$

$T_pS = \{w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, w_1x_0 + w_2y_0 + w_3z_0 = 0\}, \quad p = (x_0, y_0, z_0)\}$

Η απεικονιση Weigarten $L_p : T_pS_R^2 \to T_pS_R^2$ ειναι

$L_p = -dN_p \quad L_p(w) = -dN_p(w) \qquad w = (w_1, w_2, w_3) \in T_pS_R^2$.

$L_p(w) = -dN_p(w) = -(N\circ c)'(0) = -\frac{1}{r}w$.

Ειναι $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_R^2$ με $\boxed{c(0) = p \text{ και } c'(0) = w}$

$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

$N\circ c(t) = N(c(t)) = \frac{1}{R}(x(t), y(t), z(t)) = \frac{1}{R}c(t)$

$(N\circ c)'(t) = \frac{1}{R}c'(t)$.

Αυτοπροσαρτημενοι γραμμικοί μετασχηματισμοι.

Ορισμος: Εστω V $\mathbb{R}$-διαν. χωρος εφοδιασμενος με εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ $V \times V \to \mathbb{R}$. Μια γραμμική απεικονιση $A: V \to V$ καλειται αυτοπροσαρτημενος γραμμικος μετασχηματισμος. αν
$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in V.$$

- Οριζεται συμμετρική διγραμμική μορφή:
$B_A: V \times V \to \mathbb{R}$, $B_A(x,y) = \langle Ax, y \rangle$

Για να ξερουμε τη διγραμ. μορφη αρκεί να γνωρίζουμε την τετραγωνικη μορφη: $Q_A: V \to \mathbb{R}$ με $Q_A(x) = B_A(x,x) = \langle Ax, x \rangle$